

LA GEOMETRIA DE L'ESPAI MUSICAL

XAVIER GRÀCIA

grup de recerca GeomVAp
Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
Barcelona

Nit de la Recerca 2018 — Formæ mathematicæ
Dipòsit del Rei Martí, Barcelona — 29 setembre 2018

Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi (Leibniz)

- Anàlisi i síntesi de so
- Espectres dels instruments musicals
- Teoria de les escales
- Teoria de la dissonància
- Transformacions i simetries en música
- Combinatòria d'acords i motius
- Mètodes algorísmics de composició
- Estadística aplicada a la musicologia
- ...

geometria

1 f. [MT] [LC] Part de les matemàtiques que tracta del mesurament, de les propietats i de les relacions de punts, línies, angles, superfícies i sòlids, especialment d'aquelles propietats que romanen invariants per determinades transformacions prefixades.

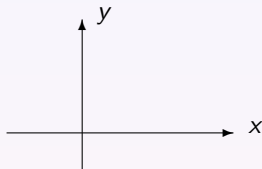
Parlarem de transformacions i simetries en música.

Més precisament, de la **geometria** de l'**espai musical**:

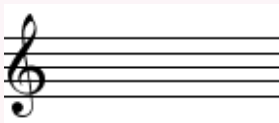
- Espai musical \approx temps \times altura \iff partitura \sim pla
podríem considerar més dimensions, p.ex. la intensitat
- Transformacions de l'espai musical \sim transformacions del pla
- Simetries: transformacions que deixen alguna propietat invariant

L'espai musical

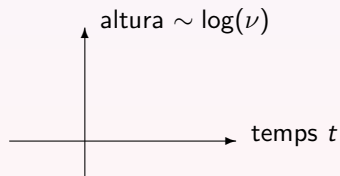
Pla cartesià: eixos



Espai musical: pentagrama



\approx



Transformacions al pla

Algunes transformacions del pla, i casos particulars:

- Translacions
 - horitzontals $(x, y) \mapsto (x + a, y)$
 - verticals $(x, y) \mapsto (x, y + b)$
- Rotacions (respecte a un punt)
 - $(x, y) \mapsto (\cos \theta x - \sin \theta y, \sin \theta x + \cos \theta y)$
 - rotació de 180° $(x, y) \mapsto (-x, -y)$
- Reflexions (respecte a un eix)
 - eix d'abscisses $(x, y) \mapsto (x, -y)$
 - eix d'ordenades $(x, y) \mapsto (-x, y)$
- Reflexions lliscants
reflexió respecte a un eix & translació en la direcció de l'eix
 - $(x, y) \mapsto (x + a, -y)$

Tota *isometria* del pla és d'algun d'aquests tipus.

Transformacions al pla

Hi ha més transformacions interessants:

- Escalat uniforme

- $(x, y) \mapsto (ax, ay) \quad (a > 0)$

$$\pi \mapsto \pi$$

- Escalat no uniforme

- $(x, y) \mapsto (ax, y)$

$$\pi \mapsto \pi$$

- $(x, y) \mapsto (x, ay)$

$$\pi \mapsto \pi$$

$$\pi \mapsto \pi$$

Transformacions a l'espai musical

La major part d'aquestes transformacions es troben en la música, on reben noms particulars.

Algunes d'elles es poden il·lustrar en el *cànon*: composició musical en què successivament van entrant diferents veus repetint cadascuna el cant de la precedent.

Vegem-ne, i escoltem-ne, alguns exemples, extrets de Youtube i la Wikipèdia:

Transformacions a l'espai musical

- translació temporal
 - Frère Jacques
 - Pachelbel, Canon in D major
- **augmentació**: escalat en temps
 - [https://en.wikipedia.org/wiki/Augmentation_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Augmentation_(music))
- **transposició**: translació en altura
 - [https://en.wikipedia.org/wiki/Transposition_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Transposition_(music))
- **inversió**: inversió en altura
 - [https://en.wikipedia.org/wiki/Inversion_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Inversion_(music))
- **retrogradació**: inversió temporal
 - J. Haydn. Sonata para piano nº 26 en La mayor. Menuetto al Rovescio
 - J.S. Bach - Crab Canon on a Möbius Strip
- altres exemples:
 - Table canon in four voices

Transformacions a l'espai musical

Amb transformacions es poden classificar els *motius* musicals en cinc tipus en funció de la seva simetria (invariància respecte a un grup de transformacions).

També es poden classificar els passatges musicals que es repeteixen *indefinidament* en set tipus que corresponen als set tipus de *frisos* també en funció de la seva simetria.

En conclusió: la música és plena de geometria!